STRUCTURE INTERNE DES ETOILES

A partir d'une certaine masse critique, un nuage devient instable gravitationnellement, se contracte, puis se fragmente. La contraction est freinée et la fragmentation stoppée lorsque l'opacité de la boule de gaz lui permet de s'échauffer avec l'énergie de la contraction gravitationnelle. Si la température alors atteinte est suffisante pour qu'une partie de l'énergie de contraction serve à dissocier les molécules des nuages (H_2 notamment) et à ioniser les atomes, l'opacité de la boule de gaz chute alors brutalement. Elle rayonne son énergie à l'extérieur et la contraction gravitationnelle reprend : le nuage s'effondre presque en chute libre jusqu'à ce qu'à nouveau la pression équilibre les forces gravitationnelles et que la protoétoile soit à nouveau opaque. Si la température alors atteinte est suffisante pour déclencher les réactions thermonucléaires (10^7 K pour vaincre les barrières de potentiel), la boule de gaz devient une étoile qui rayonne sur la séquence principale. Le dégagement d'énergie interne stoppe momentanément toute contraction gravitationnelle, jusqu'à épuisement du combustible nucléaire.

Dans ce chapitre, nous allons poser le problème de la structure interne des étoiles dans cette phase d'équilibre : quelles sont les conditions physiques qui règnent à l'intérieur des étoiles ? Quelle est leur structure radiale (on supposera toujours la symétrie sphérique) ? Quelles sont les conditions d'équilibre hydrostatique et thermique ? Comment se transforme l'énergie du centre, où se produisent les réactions nucléaires, jusqu'à la surface ?

Auparavant, pour fixer les idées, il est bon de passer en revue toutes les forces qui vont pouvoir s'opposer à la contraction gravitationnelle et selon la masse de la condensation initiale , envisager tous les états d'équilibre possibles.

I.- INTRODUCTION : DESTIN FINAL DE LA MATIERE SELON LA MASSE INITIALE

1) Au début de la contraction, la boule de gaz préstellaire est formée de gaz neutre (atomique ou moléculaire). Pour une faible masse initiale, il est possible que l'énergie de la contraction gravitationnelle ne soit pas suffisante pour atteindre la température de 10^5 K au-delà de la quelle l'hydrogène s'ionise. Les forces gravitationnelles se heurtent donc aux forces de cohésion interatomiques (ou intérmoléculaires) dès que la densité devient telle que les atomes se touchent.

La densité correspondante est de l'ordre de :

$$\frac{m_H}{(2r_0)^3} = \frac{1.67\ 10^{-24}g}{8(0.5\ 10^{-8})^3 cm^3} \simeq 1.7\ g/cm^3$$

(où m_H est la masse de l'atome H, et r_0 le rayon de Bohr).

Pour avoir l'ordre de grandeur de la masse limite qui peut être stabilisée dans cet état, écrivons que l'énergie potentielle est, en valeur absolue, deux fois l'énergie thermique (viriel) :

$$E_P = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = 2E_C = 3NKT$$

N est le nombre total de particules, $M = Nm_H$ si les atomes d'hydrogène se touchent :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = N(2r_0)^3$$

On obtient alors :

$$\boxed{M = (T/10^5K)^{3/2}\ 3\ 10^{-3}\ M_\odot}$$

Si la masse initiale est inférieure à $3\ 10^{-3}\ M_{\odot}$, la boule de gaz se liquéfie ou se solidifie et se stabilise sous forme de planète, Jupiter, la plus grosse planète du système solaire, a justement une masse $M = 10^{-3}\ M_{\odot}$, voisine de cette masse limite, et est observée en train de finir de se contracter (contraction très légère).

2) Au-delà de cette masse limite, c'est une boule de gaz ionisée qui va continuer l'effondrement gravitationnel. Si dans la contraction, la température de 10^7 K n'est pas atteinte, les réactions nucléaires ne peuvent se déclencher et ce sont les forces de répulsion de nature quantique qui vont s'opposer à la gravitation. Les électrons étant des fermions, le principe d'exclusion de Pauli empêche l'empilement des électrons dans le même volume de l'espace des phases. Ceci équivaut à une forte pression qui devient bien supérieure à la pression thermique des atomes.

La masse qui peut être stabilisée dans cet état est telle que :

$$E_P = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = 2E_C = 3NKT$$

On suppose que le milieu est totalement ionisé $N = N_i + N_e = 2N_e$ et $M = N_e m_H$. Puique $T < 10^7$ K, les électrons ne sont pas relativistes. Leur impulsion est telle que $P^2/2m = 3KT/2$.

D'après le principe d'incertitude, la séparation minimale entre deux électrons est $x_0 = h/2\pi p$, d'où le volume occupé par chaque électron $h^3/(2\pi p)^3 = h^3/8\pi^3 (3KTm)^{-3/2}$ (pour les protons, 1800 fois plus massifs, le volume minimum est bien plus petit et négligeable à cette étape).

Donc, pour un gaz d'électrons dégénéré : $\frac{4}{3}\pi R^3 = N_e x_0^3$

D'où la masse limite :

$$\boxed{M = (\frac{T}{10^7 K})^{3/4}\ 0.1\ M_\odot}$$

Pour une masse initiale inférieure à 0.1 $M_\odot$ environ, la contraction peut s'arrêter avant que la température soit suffisante pour amorcer les réactions nucléaires. La boule de gaz dense, aux électrons dégénérés, ne deviendra jamais une étoile. C'est une "naine noire" (densité $\rho = 1.3\ 10^4\ g/cm^3$ - Rayon $\sim 1.5\ 10^4$ Km).

3) Pour des masses supérieures à 0.1 $M_\odot$ environ, les réactions nucléaires débutent avant que le gaz d'électrons ne dégénère. L'étoile commence par brûler l'hydrogène en hélium (séquence principale). Les réactions nucléaires s'effectueront d'autant plus rapidement que la température est élevée et que la masse de l'étoile est grande. Lorsque l'hydrogène est épuisé au coeur de l'étoile, l'hélium est brûlé en carbone, réaction qui nécessite une température de 10^8 K. Là encore, on pourrait calculer une masse limite pour que cette température soit atteinte avant la dégénérescence des électrons. En fait, cette limite est à peu de choses près la même que la précédente car dans la transformation de l'hydrogène en hélium, des électrons disparaissent pour former des neutrons (bilan $4p + 2e^- \rightarrow He^{++}$). La masse totale est alors $M = 2Nem_H$ et le nombre total de particules $N = 3Ne/2$. Toute étoile peut donc brûler l'hélium.

4) Après la fusion de l'hélium, l'étoile se contracte à nouveau et doit brûler son carbone, ce qui nécessite une température de 10^9 K. Cette fois, les électrons sont relativistes. Leur séparation minimale est de $x_0 = h/2\pi p = \hbar c/E$ $(E_e = pc)$ et $4\pi R^3/3 = N_e x_0^3$

L'équilibre de l'étoile peut alors s'écrire (si on suppose que seule une faible partie de la masse est du carbone, au centre de l'étoile)

$$\frac{E_P}{2} = \frac{3}{10} G \frac{(2N_e m_H)^2}{R} = \frac{3}{2} N_e E_e = \frac{3}{2} N_e \frac{\hbar c}{x_0}$$

D'où la masse limite correspondante, estimée à :

$$\boxed{M = 1.3\ M_\odot}$$

Donc, pour une masse plus faible que 1.3 $M_\odot$, le gaz d'électrons devient dégénéré juste après que le coeur de l'étoile se soit transformé en carbone, et quand les électrons deviennent relativistes. L'étoile devient alors une naine blanche, de densité $\rho = 2m_H/x_0^3 = 1.2\ 10^6 g/cm^3$, de rayon $\sim 1.5\ 10^4$ Km.

5) Si la masse de l'étoile est supérieure à 1.3 $M_\odot$ environ, la dégénérescence électronique n'est pas suffisante pour arrêter la contraction. La température de l'étoile augmente, les éléments lourds (jusqu'au fer) sont synthétisés. L'étoile se dirige alors vers une instabilité catastrophique : l'explosion en supernova. Ou le centre s'échauffe beaucoup et les noyaux lourds sont détruits (Fe $\rightarrow$ He) par des réactions endothermiques dans le noyau qui se refroidit, ce qui produit un effondrement brutal, ou la densité au centre devient si forte que les électrons sont capturés par les noyaux : la pression du gaz dégénéré d'électrons diminue fortement et cesse de compenser la gravitation ; le noyau s'effondre. La matière est comprimée jusqu'à ce que les neutrons deviennent à leur tour dégénérés. Leur pression quantique s'oppose alors à une plus grande contraction.

La séparation minimale entre les neutrons est alors de l'ordre de :

$$x_0 \simeq \hbar/\sqrt{3m_H KT} \simeq 3.8\ 10^{-13}\text{cm} \quad (\text{pour } T \sim 10^{10}\text{K})$$

La densité correspondante est de $\rho = m_H/x_0^3 = 3\ 10^{13}(T/10^{10})^{3/2}$ g/cm^3.
Ce qui reste maintenant de l'étoile (le coeur, car l'enveloppe a été éjectée) est appelée une étoile à neutrons. Notons que la séparation minimale s'approche de la portée des forces nucléaires ou du rayon des nucléons, de l'ordre du Fermi ($= 10^{-13}$ cm). Les neutrons "se touchent" comme dans un solide.

6) Si la masse est si grande que la température obtenue est de l'ordre de 10^{13} K, les neutrons deviennent relativistes. Leur séparation minimale devient de l'ordre de :

$$x_0 \simeq \hbar c/E_n \qquad (E_n \simeq pc)$$

et l'équilibre nécessite :

$$M \leq (3/4\pi)^{1/2}(10\hbar c/3G)^{3/2}\ \frac{1}{m_H^2}$$

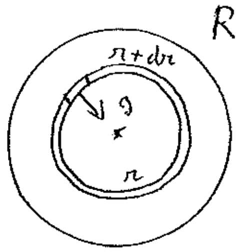
$$\boxed{M \leq 3\ M_\odot} \qquad (\text{indépendamment de } T)$$

Si le coeur restant de l'étoile est donc supérieur à 3 $M_\odot$ environ (valeur indicative, étant donné les approximations faites), plus rien ne peut stopper l'effondrement. Il s'agit d'un "trou noir", appelé ainsi parce que la densité y est si forte que la vitesse de libération en son voisinage dépasse la vitesse de la lumière : les photons eux-mêmes sont piégés dans un trou noir.

$V_\ell = \sqrt{2GM/R} \geq C$: pour une masse de 3 $M_\odot$, le rayon de l'objet doit être inférieur à 9 Km, donc la densité supérieure à 2 10^{15} g/cm^3 - $(\rho \propto M^{-2})$ -

II.- <u>EQUATIONS D'EQUILIBRE</u>

1) <u>Equilibre hydrostatique</u> :



On suppose la structure stationnaire, et de symétrie sphérique. Ainsi, d'après le théorème de Gauss, l'accélération due à la gravitation au rayon r de l'étoile est $g = \frac{GM(r)}{r^2}$. Pour qu'il y ait équilibre entre pression et gravitation, il faut que la force par unité de volume $\frac{GM(r)}{r^2}\rho$ soit égale au gradient de pression dP/dr, soit :

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -g\rho} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{-\frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}\rho}$$

D'autre part, la masse dM comprise entre r et r + dr est telle que :

$$\boxed{\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2\rho}$$

(Quelques ordres de grandeur, pour fixer les idées : en supposant la densité ρ constante pour le Soleil, on trouve une pression centrale de $3\ 10^{15}$ c.g.s. ou $3\ 10^{9}$ atmosphères).

2) <u>Equilibre thermique</u> :

Si l'on appelle ε le taux de production d'énergie par réactions nucléaires, par unité de masse et de temps, la luminosité L de l'étoile est, à l'équilibre :

$$L = \int_0^R \varepsilon\rho 4\pi r^2 dr$$

Ou bien, en appelant L_r le flux d'énergie à travers la sphère de rayon r :

$$dL_r/dr = \varepsilon\rho 4\pi r^2$$

Cette équation ne s'applique qu'aux phases calmes de l'étoile, où l'équilibre est stationnaire. Dans le cas contraire, lorsque la structure de l'étoile varie rapidement, il faut tenir compte du travail des forces de pression et de la variation de l'énergie interne $\frac{3}{2}\frac{KT}{\mu}$ par unité de masse.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\frac{KT}{\mu}\right) = \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} + \varepsilon - \frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{dL_r}{dr}$$

(le travail des forces de pression $- PdV = - Pd(1/\rho) = P \frac{d\rho}{\rho^2}$)

En utilisant l'équation d'état $P = \rho KT/\mu$, la relation devient

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2\rho\left[\varepsilon - \frac{3}{2}\rho^{2/3}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^{5/3}}\right)\right]$$

3) Transfert de l'énergie :

Dans une étoile, les réactions nucléaires produisent de l'énergie au centre, et celle-ci est transférée vers la surface pour y être rayonnée. Un gradient de température s'établit du centre au bord (dans le Soleil $T \sim 10^7$ K au centre, et $T \sim 5\ 10^3$ K à la surface).

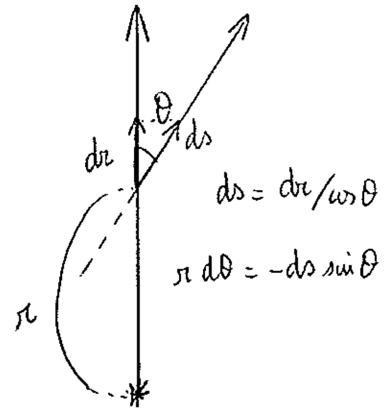
Le transfert se fait par rayonnement ou par convection. La conduction est beaucoup trop lente pour jouer un rôle (le libre parcours moyen des particules est beaucoup trop petit), excepté lorsque le gaz d'électrons est dégénéré, dans les naines blanches, ou dans le coeur des géantes rouges.

A/ - Transfert radiatif :

Dans tout ce qui suit, nous nous placerons à une fréquence ν donnée, mais sous-entendrons les indices ν de toutes les fonctions (I_ν, K_ν, j_ν, etc...) pour la clarté de l'exposé.

Appelons K le coefficient d'absorption par unité de longueur, tel que $dI/I = - K\, d\ell$ soit la fraction d'intensité absorbée sur la distance $d\ell$. L'opacité $d\tau = K d\ell$ est déjà de l'ordre de 1 pour $d\ell \sim 1$ cm.

Le milieu est donc presque équivalent à un corps noir, et le rayonnement presque isotrope, ne serait-ce la très légère anisotropie liée au gradient de température entre centre et bord (essentiel pour le transfert radiatif et le rayonnement de l'étoile !). Nous supposerons donc que I dépend de θ et de r, et écrirons l'équation de transfert :



$$\cos\theta \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{dI}{ds} = - KI + j$$

j étant l'émissivité du milieu. Puisque I est légèrement anisotrope, considérons les différents moments de I :

- Densité d'énergie :

$$E(r) = \frac{1}{C} \int I d\Omega = \frac{2\pi}{C} \int_{-1}^{1} I(u) du$$

(où l'on définit $u = \cos\theta$)

- Flux de rayonnement :

$$H(r) = \int I \cos\theta d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{1} I(u) u du$$

- Pression de radiation :

$$P_R(r) = \frac{1}{C} \int I \cos^2\theta d\Omega = \frac{2\pi}{C} \int_{-1}^{1} I(u) u^2 du$$

L'équation de transfert s'écrit : (en intégrant sur Ω)

$$\frac{dH}{dr} + \frac{2}{r} H + KCE - 4\pi j = 0 \qquad (1)$$

De même, en multipliant l'équation de transfert par $\cos\theta$, et en intégrant sur toutes les directions, on obtient :

$$\frac{dP_R}{dr} + \frac{1}{r}(3P_R - E) + \frac{K}{C} H = 0 \qquad (2)$$

Pour obtenir une équation supplémentaire (il y a trois inconnues), exprimons le fait que I est presqu'isotrope, en développant en série

$I = I_0 + I_1 \cos\theta + \ldots + I_n \cos^n\theta \ldots$

Les équations précédentes donnent :

$$\frac{dI_{n-1}}{dr} + KI_n \simeq 0$$

Donc, en ordres de grandeur, $I_n/I_{n-1} \sim 1/KR \sim 10^{-10}$

Il est justifié de ne considérer que le premier terme $I_1\cos\theta$.

Il vient alors :

$$E = \frac{4\pi I_0}{C} \qquad H = \frac{4\pi I_1}{3} \qquad P_R = \frac{4\pi I_0}{3C}$$

et :

$$\boxed{P_R = \frac{1}{3} E}$$

On peut remarquer que E et P_R, qui sont des fonctions paires de $\cos\theta$, ne sont pas affectées par la faible anisotropie et seront donc celles d'un corps noir isotrope. Seul le flux H en dépend (de toutes façons, H = 0 s'il y a isotropie).

Le flux H par unité de surface est relié à la luminosité L_r de la sphère r par :

$$L_r = 4\pi r^2 H$$

L'émissivité j, (cf le cas où I est constante), s'écrit à l'ETL :

j = KB(T), B(T) étant la fonction de Planck (c'est la loi de Kirchoff).

A cette émission thermique normale, s'ajoute la contribution supplémentaire de l'énergie nucléaire ε :

$$j = KB(T) + \frac{\varepsilon\rho}{4\pi}$$

On peut éliminer ε, à l'aide de l'équation d'équilibre thermique :

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho\varepsilon \qquad \text{d'où } j = KB + \frac{1}{4\pi}\frac{dL_r}{4\pi r^2 dr}$$

L'équation(1) devient alors :

$$\frac{dH}{dr} + \frac{2H}{r} + KCE - 4\pi KB - \frac{dL}{4\pi r^2 dr} = 0$$

Or, puisque $L_r = 4\pi r^2 H \quad (dL_r/4\pi r^2 dr) = (dH/dr) + (2H/r)$

On peut alors déduire :

$$\boxed{E = \frac{4\pi B}{C}}$$

Ce qui est exactement la relation du corps noir. Il vient de même pour la pression de radiation $P_R = E/3 = 4\pi B/3C$.

L'équation (2) permet alors de calculer le flux H :

$$H = -\frac{C}{K}\frac{dP_R}{dr} = -\frac{4\pi}{3K}\frac{dB}{dr}$$

et puisque $L_r = 4\pi r^2 H$:

$$\boxed{L_r = -4\pi r^2 \frac{4\pi}{3K}\frac{dB}{dr}}$$

C'est ici que l'on doit se rappeler que cette équation, comme toutes celles qui précèdent, est valable pour chaque fréquence ν. Pour obtenir le flux total de rayonnement L_r, on doit sommer sur toutes les fréquences :

$$L_r = -4\pi r^2 \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \frac{1}{K_\nu}\frac{dB_\nu}{dr}\,d\nu$$

ce qui nous conduit à introduire une moyenne de l'opacité $\overline{K}$, pondérée sur toutes les fréquences par la dérivée de la fonction de Planck :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{K}}\frac{dB}{dr} = \int_0^\infty \frac{1}{K_\nu}\frac{dB_\nu}{dr}\,d\nu}$$

où B est la fonction de Planck intégrée :

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi} \qquad (\sigma \text{ constante de Stefan})$$

On peut aussi bien remplacer dr par $\frac{dr}{dT}$ dT, et l'on a la définition de $\overline{K}$:

$$\boxed{\frac{1}{\overline{K}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{K_\nu}\frac{dB_\nu}{dT}\,d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT}\,d\nu}}$$

$\overline{K}$ est appelée <u>moyenne de Rosseland</u>.

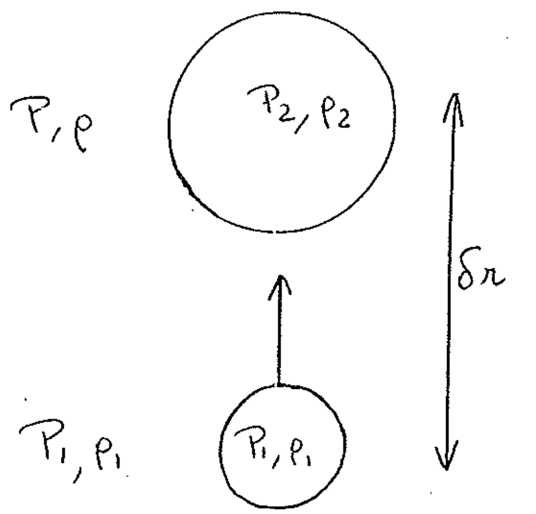
L'équation de base cherchée, reliant le flux de rayonnement au gradient de température de l'étoile s'écrit donc :

$$\boxed{L_r = -4\pi r^2 \frac{16}{3}\frac{\sigma}{\overline{K}} T^3 \frac{dT}{dr}}$$

Rappelons que l'opacité K est due à plusieurs processus : la photoionisation (transition bound-free), les transitions free-free (les électrons gagnent de l'énergie en absorbant un photon), et la diffusion électronique, ou Thomson, (surtout importante dans les étoiles massives).

B/ - Transfert convectif :

- Lorsque l'équilibre radiatif devient instable vis à vis des perturbations de densité, de la matière peut se mettre en mouvement et le transfert de l'énergie peut se faire par convection.



- Considérons une bulle de matière dans l'étoile et déplaçons-la d'une distance δr selon un rayon. Initialement sa densité et sa pression sont ρ_1 et P_1. On suppose le gaz parfait et les transformations adiabatiques. Dans la position 2, sa pression et sa densité vont devenir telles que :

$$\rho_2 = \rho_1 (P_2/P_1)^{1/\gamma}$$

et l'équilibre de pression va s'établir avec les conditions extérieures, dans cette position 2 : $P_2 = P$

La bulle de gaz va-t-elle avoir tendance à continuer son ascension (instabilité) ou à revenir à sa position d'origine (stabilité) ? Si la densité atteinte ρ_2 est supérieure à la densité ambiante ρ, la bulle va certainement redescendre.

La condition de stabilité s'écrit donc :

$$\rho_2 = \rho_1 (P_2/P_1)^{1/\gamma} > \rho$$

$$\rho_1 \left(\frac{P_1 + \frac{dP}{dr}\delta r}{P_1}\right)^{1/\gamma} > \rho 1 + \frac{d\rho}{dr}\delta r$$

$$\boxed{-\frac{dP}{drP} < -\gamma \frac{d\rho}{dr\rho}}$$

Le gradient de pression doit donc être inférieur en valeur absolue au gradient adiabatique pour assurer la stabilité.

En fonction de la température, cette condition s'écrit (en supposant $P = \rho KT/\mu$)

$$\boxed{-\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{dP}{Pdr} > -\frac{dT}{Tdr}}$$

- Si le gradient de température, en valeur absolue, est supérieur au gradient adiabatique, la convection s'installe : la matière qui monte sera plus chaude que son environnement, puisque le gradient de température est supérieur à $(T_2 - T_1)/\delta r$ (la baisse de température qu'elle subit est, elle, adiabatique). La convection correspondra bien à un transport de l'énergie du centre au bord, dans le sens du gradient. L'énergie transportée est justement proportionnelle à l'excès du gradient de T sur le gradient adiabatique, excès que nous appellerons :

$$\Delta \text{grad } T = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{TdP}{Pdr} - \frac{dT}{dr}$$

Le flux d'énergie transportée par le mouvement convectif est :

$$H = C_p \rho V dr \Delta \text{grad } T$$

(C_p chaleur massique à P constante, V vitesse de convection).

Cette vitesse V peut être déterminée, à partir de l'accélération gravitationnelle subie par les bulles de matière qui montent. Ces bulles sont moins denses que la matière environnante de :

$$d\rho = \left(\frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{\gamma}\frac{\rho}{P}\frac{dP}{dr}\right)dr = \frac{\rho}{T}\Delta \text{grad } T \, dr$$

Au départ, aucune force ne s'exerce sur la bulle ; après sa montée à dr la force est $(\frac{\rho}{T}\ \Delta\ \text{grad}\ T\ dr)\ \frac{GM(r)}{r^2}$ d'où le travail exercé :

$$\frac{1}{2}\ \rho v^2 = (\frac{\rho}{T}\ \Delta\ \text{grad}\ Tdr)\ \frac{GM(r)}{r^2}\ \frac{dr}{2}$$

En reportant cette valeur de V dans H :

$$H = C_p \rho \sqrt{(GM(r))/Tr^2}\ (\Delta\ \text{grad}\ T)^{3/2}\ \frac{\ell^2}{4}$$

où l'on a défini $\ell = 2dr$, la longueur de mélange, après laquelle un élément convectif se dissout dans le reste du gaz interstellaire.

Pour donner des ordres de grandeur, la longueur du mélange peut être typiquement de 10% du rayon de l'étoile. Pour des étoiles comme le Soleil, l'excès de gradient de température sur le gradient adiabatique ne peut être que très faible (10^{-6} en valeur relative) et la vitesse de convection est inférieure à la vitesse thermique pour 3 ou 4 ordres de grandeur. La convection ne perturbe pas l'équilibre hydrostatique, mais elle est efficace pour homogénéiser la composition chimique de l'étoile. Pour des étoiles massives ($M > 1.5\ M_{\odot}$), la convection s'installe dans le noyau. Pour les étoiles moins massives, la convection a lieu sous la surface.

III.- EQUATIONS D'ETAT DU GAZ STELLAIRE

Pour modéliser la structure stellaire, à partir des équations d'équilibre établies précédemment, il nous faut encore une relation liant la pression à la densité et à la température. Sauf en cas de dégénérescence, le milieu stellaire fortement ionisé obéit à la loi des gaz parfaits. Il faut toutefois ajouter à cette pression gazeuse la pression de radiation.

La pression gazeuse s'écrit donc $P = \rho KT/\mu$, où il reste à déterminer la masse moyenne μ, en fonction de la composition chimique. On appelle X la fraction en masse de l'hydrogène, Y celle de l'hélium et Z celle de tous les éléments lourds. $(X + Y + Z = 1)$. Chaque atome de masse A contribue à 1 particule (ion) + A/2 électrons. Le nombre total d' ions par unité de volume est donc :

$$N_i = \frac{\rho}{m_H} \left(X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{A}\right) \quad (m_H \text{ masse de l'atome H})$$

et celui des électrons :

$$N_e = \frac{\rho}{m_H} \left(X + 2\,\frac{Y}{4} + \frac{A}{2}\,\frac{Z}{A}\right)$$

Le nombre total de particules est :

$$N = \left(2X + \frac{3}{4}\,Y + \frac{Z}{2}\right) \frac{\rho}{m_H}$$

par unité de volume.

La masse moyenne est :

$$\frac{\rho}{N} = m_H \left(2X + \frac{3}{4}\,Y + \frac{Z}{2}\right)^{-1}$$

et, compte tenu de ce que $Z = 1 - (X + Y)$:

$$\boxed{\mu = \frac{4m_H}{2 + 6X + Y}}$$

dans le cas où la contribution des éléments lourds est négligeable $X + Y \sim 1$

$$\boxed{\mu = \frac{4m_H}{3 + 5X}}$$

Pour la matière du système solaire $X = 0{,}7$, $Y = 0{,}27$, $Z = 0.03$ et $\mu = 0{,}62\ m_H$.

1) Pression de radiation :

Cette pression provient du fait que lorsqu'un atome absorbe un photon, il gagne de la quantité de mouvement. Réciproquement, il perd de la quantité de mouvement en émettant un photon, mais comme cette émission est isotrope, la moyenne vectorielle sera nulle sur plusieurs émissions. Par contre, le rayonnement de l'étoile, lui, n'est pas isotrope, mais dirigé vers l'extérieur.

Puisque le flux d'énergie par unité de surface et par seconde est H, le flux de quantité de mouvement est H/C, dont une fraction K est absorbée par unité de longueur. La force exercée par le rayonnement sur la matière est donc :

$$F_R = K \frac{H}{C} = - \frac{dP_R}{dr}$$

avec : $$\boxed{P_R = \frac{4\sigma}{3C} T^4} = \frac{a}{3} T^4 \qquad (a = 4\sigma/c)$$

La pression totale est donc $P = \rho \frac{KT}{\mu} + \frac{a}{3} T^4$. Le terme de pression de radiation devient supérieur à la pression gazeuse pour :

$$T_{(K)} > 3.6\ 10^7 \rho^{1/3}\ (g/cm^3)$$

(Dans le cas du Soleil, il est négligeable)

2) Dégénérescence :

Les électrons et les nucléons (protons, neutrons) sont des Fermions, et selon le principe d'exclusion de Pauli, ne peuvent pas être comprimés au-delà d'une certaine limite. Dans une unité de volume de l'espace des phases, h , ne peuvent se trouver que deux électrons (ou neutrons), antiparallèles (spins + 1/2 et - 1/2).

Le nombre d'électrons d'impulsion comprise entre p et p + dp, (ou d'énergie comprise entre E et E + dE) est :

$$N(p)dp = \frac{2}{h^3} \; 4\pi p^2 dp f(p)$$

avec :

$$f(p) = \frac{1}{e^{\alpha + (E/KT)} + 1}$$

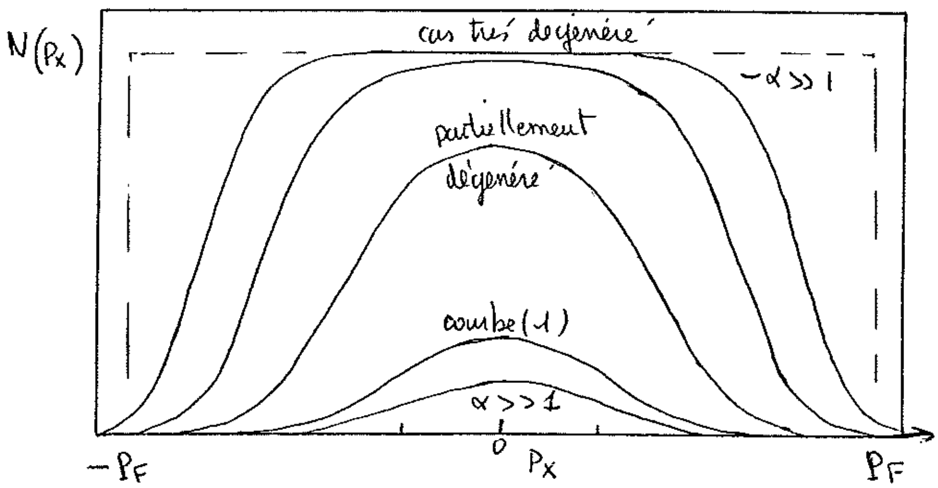
(α est le rapport du potentiel chimique à KT)

Le paramètre α détermine la dégénérescence, il est lié à la densité des électrons.

- Si $\alpha >> 1$, $f(p) \propto e^{-E/KT}$: on retrouve la statistique de Maxwell-Boltzmann (cf. courbe 1).
- Si $-\alpha >> 1$, $f(p) \sim 1$ pour les faibles énergies (tous les niveaux sont complètement occupés) et $f(p) \sim 0$ pour $E >> KT\alpha$.

On appelle énergie de Fermi E_F, l'énergie jusqu'à laquelle les niveaux sont remplis, dans le cas de complète dégénérescence.

$E_F = \alpha KT$



La pression exercée par un gaz d'électrons complètement dégénéré est égale à :

$$P_e = \frac{1}{3}\int_0^{P_F} \vec{p}.\vec{V} \, \frac{2}{h^3} \, 4\pi p^2 dp$$

(puisque $f(p) = 1$ jusqu'à $p = P_F$

$f(p) = 0$ pour $p > P_F$)

. Dans le cas classique non relativiste $\vec{p} = m\vec{V}$

et $$P_e = \frac{8\pi}{15mh^3} P_F^5$$ (m masse des électrons)

D'autre part, la densité d'électrons est :

$$n_e = \int_0^{P_F} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp = \frac{8\pi}{3h^3} P_F^3$$

En éliminant $P_F = (\frac{3h^3}{8\pi} n_e)^{1/3}$

On obtient la pression : $\boxed{P_e = K(n_e)^{5/3}}$

. Dans le cas ultrarelativiste $v = c$ $\quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{p} c$

et $$P_e = \frac{2\pi c}{3h^3} P_F^4$$

$$\boxed{P_e = K'(n_e)^{4/3}}$$

Dans les deux cas, on peut exprimer n_e en fonction de la densité ρ du milieu par $n_e = \rho/\mu_e$ où μ_e est la masse moyenne par électron du gaz stellaire. $\mu_e \simeq (2m_H)/(X+1)$ (si $Z << 1$).

Pour un gaz complètement dégénéré, la pression ne dépend plus que de la densité et non de la température.

. Dans le cas semi-relativiste :

$$E = mC^2/(\sqrt{1 - V^2/C^2}) \quad p = mV/(\sqrt{1 - V^2/C^2}) \quad V = \frac{P/m}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2C^2}}}$$

$$P_e = \frac{8\pi}{3mh^3} \int_0^{P_F} \frac{p^4 dp}{\sqrt{1 + (p/mC)^2}}$$

$$P_e = \frac{\pi m^4 C^5}{3h^3} f(X)$$

$$f(X) = X(2X^2 - 3)(X^2 + 1)^{1/2} + 3 \text{ arg sh}X$$

avec : $$X = P_F/mC \propto n_e^{1/3}$$

. Dans le cas d'une dégénérescence partielle, on doit donc tenir compte de la fonction $f(p) = (e^{\alpha + (E/KT)} + 1)^{-1}$.

P_e et n_e sont alors fonction à la fois de la densité et de la température par :

$$P_e = \frac{8\pi KT}{3h^3} (2mKT)^{3/2} F_{3/2}(\alpha)$$

$$n_e = \frac{4\pi}{h^3} (2mKT)^{3/2} F_{1/2}(\alpha)$$

où :

$$F_y(\alpha) = \int_0^\infty \frac{u^y du}{e^{\alpha+u} + 1}$$

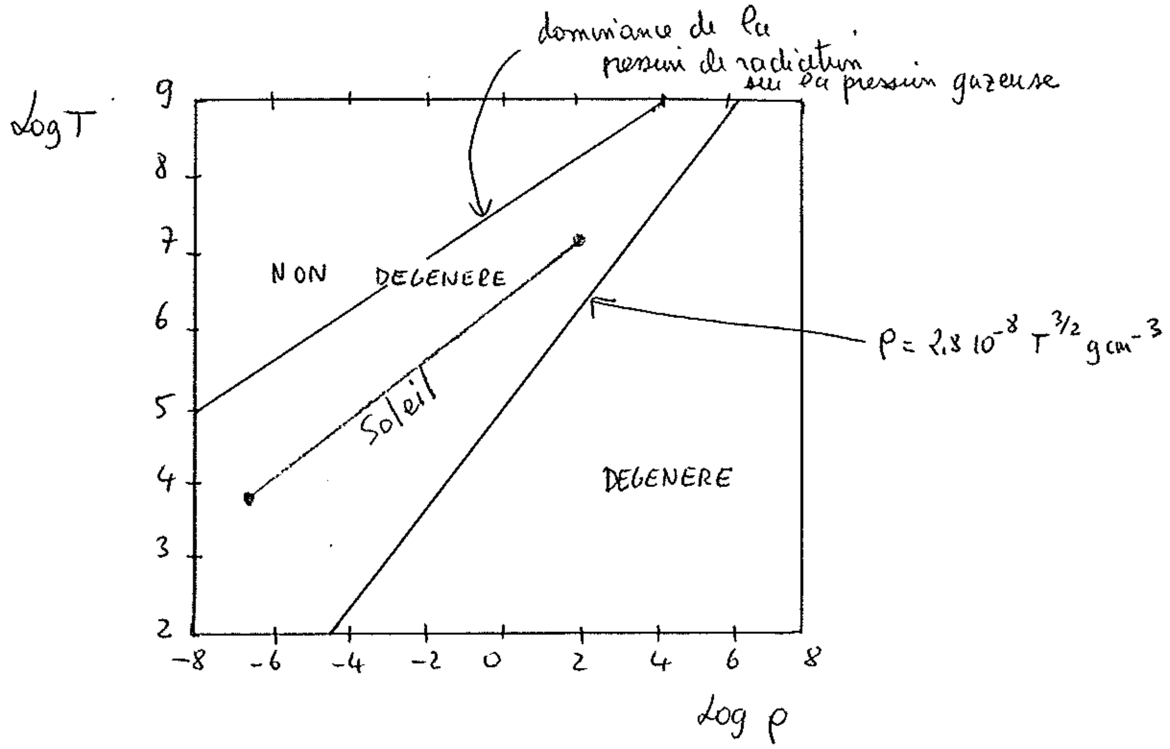
. La relation entre ρ et T qui délimite le cas non dégénéré du cas dégénéré pour la pression des électrons est :

$$\rho \frac{KT}{\mu_e} = \frac{1}{5m_e} \left(\frac{8\pi}{3h^3}\right)^{-2/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

soit :

$$\frac{\rho}{\mu_e} = n_e = 1.4\ 10^{16}\ T^{3/2}\ (cm^{-3})$$

Pour les densités supérieures, la pression quantique domine.



IV.- MODELES D'ETOILES

Toutes les équations de base sont maintenant réunies pour pouvoir déterminer la structure interne à l'équilibre d'une étoile. Ces équations relient $P(r)$, $\rho(r)$, $T(r)$, $M(r)$, $L(r)$.

Pour une composition chimique donnée, nous avons bien cinq équations :

- Equation d'équilibre mécanique $-\, dP/dr = \rho \dfrac{GM(r)}{r^2}$
- Distribution sphérique de la masse $dM/dr = 4\pi\rho r^2$
- Equation d'équilibre thermique $dL_r/dr = 4\pi r^2 \rho\varepsilon$
- Transport de l'énergie :

  a) cas radiatif : $-\dfrac{dT}{dr} = \dfrac{L_r 3\overline{K}}{64\pi r^2 \sigma T^3}$

  b) cas convectif (le gradient est alors pratiquement le gradient adiabatique) :

  $$-\frac{dT}{dr} = (1 - \frac{1}{\gamma}) \frac{T}{P} (-\frac{dP}{dr})$$

- Equation d'état : $P = P_{gaz} + P_R$ $\quad P_R = \dfrac{4\sigma}{3C} T^4$

  $P_{gaz} = \rho \dfrac{KT}{\mu}$ ou bien pression du gaz d'électrons dégénéré, à forte densité.

  où $\mu = 4m_H/(2 + 6X + Y)$

- On suppose aussi connue la moyenne de Rosseland de l'opacité $\overline{K}(\rho,T,\mu)$ et le taux de production d'énergie thermonucléaire $\varepsilon(\rho,T,X)$.

- On dispose d'autre part de conditions aux limites fournies par les observations : masse totale M, rayon R, luminosité L, température de surface T_S, composition chimique. (on peut aussi considérer la pression extérieure négligeable). La structure interne de l'étoile peut donc en principe, être complètement déterminée.

- Signalons que très souvent ces équations sont exprimées en fonction de la variable principale M(r) au lieu de r. D'abord les équations se simplifient un peu (exemple : équation de l'équilibre thermique $\dfrac{dL(M)}{dM} = \varepsilon$) ; d'autre part, quand une étoile ne fait rien d'autre que de se dilater ou de se contracter, la composition chimique X(M) reste constante.

- En pratique, si l'on peut connaître la structure interne d'une étoile pour une composition chimique donnée, cette composition varie au cours du temps et de façon tout à fait inhomogène. Donc, en fait, il faut connaître tout le passé de l'étoile pour calculer l'enrichissement en éléments lourds. On ne détermine donc pas un seul état stationnaire, mais un modèle de structure interne de l'étoile en fonction du temps.

- Les méthodes utilisées aujourd'hui résolvent numériquement le système d'équations différentielles établi plus haut.

Pour une solution approchée, on utilise parfois les indices polytropiques. On peut en effet montrer qu'il existe un indice n tel que :

$$P = K \rho^{(n+1)/n} \qquad (\text{et } \rho = K'T^{n})$$

où n est approximativement constant dans une grande partie de l'étoile (n = 3,5 pour le Soleil, loin du centre et de la surface).